Έστω $f:[a,b]\to R$ μια συνεχής συνάρτηση με $f'(a)<0<f'(b)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο (a,b).

Η πρόταση είναι γνωστή ως το θεώρημα $\mathrm{Darboux}$.

Απόδειξη:

Επειδή $f'(a)<0$ τότε από τον ορισμό ισχύει $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0$ άρα υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(a,a+\delta_1)$ να ισχύει $f(x)<f(a)$. Όμοια επειδή $\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=f'(\beta)>0$ υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$ να ισχύει $f(x)>f(\beta)$.

Οπότε η f δε παρουσιάζει ακρότατο ούτε στο $x_0=a$ ούτε στο $x_0=\beta$. Όμως επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ γνωρίζουμε ότι θα παίρνει ελάχιστη τιμή. Αφού δε την παίρνει στα άκρα , θα υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ στο οποίο η f θα παρουσιάζει ελάχιστο.

Και η απόδειξη τελείωσε.